高 三 诊 断 性 练 习

数学答题分析

1．设复数 z_1,z_2 满足 $z_2\neq 0$，且 $\left|z_1\cdot\overline{z_2}\right|=2\left|z_2\right|$，则 z_1 可以是

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$2+2\mathrm{i}$　　C．$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D．$4\mathrm{i}$

【答案】 C.

【考查意图】 本小题以复数为载体，考查复数、共轭复数的定义以及复数的模及运算性质等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力等，考查化归与转化思想，考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性.

【答题分析】 只要理解复数及共轭复数的概念，复数的模的定义及运算性质，即可解决问题；或者利用复数的代数形式表示其模，进行运算，亦可解决问题.

解法一：由 $\left|z_1\cdot\overline{z_2}\right|=2\left|z_2\right|$ 得 $\left|z_1\right|\cdot\left|\overline{z_2}\right|=2\left|z_2\right|$，因为 $\left|z_2\right|=\left|\overline{z_2}\right|$，所以 $\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|=2\left|z_2\right|$，又 $z_2\neq 0$ 即 $\left|z_2\right|\neq 0$，可得 $\left|z_1\right|=2$．因为 $\left|-1-\mathrm{i}\right|=\sqrt{2}$，故 A 选项错误；因为 $\left|2+2\mathrm{i}\right|=2\sqrt{2}$，故 B 选项错误；因为 $\left|4\mathrm{i}\right|=4$，故 D 选项错误，故选 C.

解法二：设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=x+y\mathrm{i}$，$a,b,x,y\in\mathbf{R}$，则 $\overline{z_2}=x-y\mathrm{i}$，

可得 $z_1\cdot\overline{z_2}=\left(ax+by\right)+\left(bx-ay\right)\mathrm{i}$，所以 $\left|z_1\cdot\overline{z_2}\right|=\sqrt{\left(ax+by\right)^2+\left(bx-ay\right)^2}$，

化简得 $\left|z_1\cdot\overline{z_2}\right|=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$，又 $\left|z_2\right|=\sqrt{x^2+y^2}$，且 $\left|z_2\right|\neq 0$，

由题意得 $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}=2\sqrt{x^2+y^2}$，故 $\sqrt{a^2+b^2}=2$.因为 $\left|-1-\mathrm{i}\right|=\sqrt{2}$，故 A 选项错误；因为 $\left|2+2\mathrm{i}\right|=2\sqrt{2}$，故 B 选项错误；因为 $\left|4\mathrm{i}\right|=4$，故 D 选项错误，故选 C.

【错因分析】

错选 A，运用复数代数形式求模的公式时，忘记开方，导致错误；

错选 B，概念不清，误认为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模为 $\left|z\right|=\sqrt{a+b}$，导致错误；

错选 D，概念不清，误认为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模为 $\left|z\right|=\sqrt{a+b}$，导致错误.

【难度属性】 属于容易题.

2．设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,x^2-4x+m<0\right\}$．若 $A\cap B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=$

A．$\{1,2,3\}$　　B．$\{1,2,4\}$　　C．$\{0,1,2,3\}$　　D．$\{1,2,3,4\}$

【答案】 D.

【考查意图】 本小题以一元二次不等式为载体，考查集合的运算、一元二次不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查数形结合思想、函数与方程思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和综合性.

【答题分析】.

解法一：设 $f\left(x\right)=x^2-4x+m$，因为 $A=\{1,2,4\}$，$A\cap B=\{1,2\}$，所以 $1\in B,2\in B,4\notin B$，

$$故\begin{cases}f\left(1\right)<0,\\ f\left(2\right)<0,\\ f\left(4\right)\geqslant 0,\end{cases}即\begin{cases}1-4+m<0,\\ 4-8+m<0,\\ 16-16+m\geqslant 0,\end{cases}\quad 所以\ 0\leqslant m<3.$$

所以 $f\left(0\right)=m\geqslant 0$，$f\left(3\right)=9-12+m<0$.

$0\notin B,3\in B$.所以 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，故选 D.

解法二：注意到 $A\cap B=\{1,2\}\neq\varnothing$，所以 $\Delta=16-4m>0$，解得 $m<4$.

故 $B=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,2-\sqrt{4-m}<x<2+\sqrt{4-m}\right\}$，

因为 $A=\{1,2,4\}$，$A\cap B=\{1,2\}$，所以 $1\in B,2\in B,4\notin B$，

可得 $\begin{cases}2-\sqrt{4-m}<1,\\2+\sqrt{4-m}\leqslant 4,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant m<3$，

因为 $3^2-4\times3+m=m-3<0$，所以 $3\in B$；又 $0^2-4\times0+m\geqslant0$，所以 $0\notin B$.

所以 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，故选 D.

解法三：因为 $A=\{1,2,4\}$，$A\cap B=\{1,2\}$，所以 $1\in B,2\in B,4\notin B$，

又因为抛物线 $y=x^2-4x+m$ 的对称轴为 $x=2$，

所以由 $1\in B$ 知 $3\in B$；由 $4\notin B$ 知 $0\notin B$，

所以 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，故选 D.

解法四：因为 $A=\{1,2,4\}$，故 $A\cup B$ 必含有元素 4，故排除选项 A 和 C；

又因为 $A\cap B=\{1,2\}$，所以 $1\in B$，而 $y=x^2-4x+m$ 的对称轴为 $x=2$，可得 $3\in B$，

所以 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，故选 D.

【错因分析】

错选 A，未能正确理解集合的运算，导致错误；

错选 B，未能根据二次函数的对称性得到 $3\in B$，导致错误；

错选 C，未能正确理解集合的运算，导致错误.

3．现用甲、乙两台 3D 打印设备打印一批对内径有较高精度要求的零件. 已知这两台 3D 打印设备在正常工作状态下打印出的零件内径尺寸 Z (单位: μm)服从正态分布 $N\left(100,3^2\right)$. 根据要求，正式打印前需要对设备进行调试，调试时，两台设备各试打了 5 个零件，零件内径尺寸 (单位: μm)如茎叶图所示．根据以上信息，可以判断

A．甲、乙两台设备都需要进一步调试

B．甲、乙两台设备都不需要进一步调试

C．甲需要进一步调试，乙不需要进一步调试

D．乙需要进一步调试，甲不需要进一步调试

	甲			乙		
	9	8	9	0	7	9
2	1	0	10	1	5	

【答案】D

【考查意图】本小题以正态分布为载体，考查 3σ 原则等基础知识；考查运算求解能力等；考查统计与概率思想等；考查数学运算、数据分析等核心素养；体现基础性和应用性.

【答题分析】因为零件内径 Z (单位: μm)服从正态分布 $N\left(100,3^2\right)$，所以 $\mu=100$，$\sigma=3$，所以 $\mu-3\sigma=91$，$\mu+3\sigma=109$，根据 3σ 原则，因为甲的 5 个零件的内径均满足 $91\leqslant Z\leqslant109$，而乙有一个零件内径为 $90\notin[91,109]$，所以乙需要进一步调试，甲不需要进一步调试.

【错因分析】

错选 A，没有掌握 3σ 原则，以为零件的内径都应为 100 μm，导致错误；

错选 B，误认为 $Z\leqslant\mu+3\sigma$ 即可，导致错误；

错选 C，学生将甲乙数据看反，导致错误.

【难度属性】属于容易题.

4．甲、乙等 6 位同学去三个社区参加义务劳动，每个社区安排 2 位同学，每位同学只去

一个社区，则甲、乙到同一社区的不同安排方案共有

A．6 种　　B．18 种　　C．36 种　　D．72 种

【答案】B

【考查意图】本小题以同学参加义务劳动为载体，考查排列组合等基础知识，考查运算求解能力等，考查数学运算等核心素养，体现基础性，渗透德育教育和劳动教育．

【答题分析】

解法一：先确定甲、乙去的社区，再依次确定去剩下两个社区中每个社区的同学，共 $C_3^1C_4^2C_2^2$=18 种．

解法二：将甲、乙分为同一组，剩余的 4 人平均分为两组共 $\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$ 种方法，再将三种分配到三个社区共 $\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_3^3$=18 种．

解法三：将 6 位同学平均分配到三个社区共有 $C_6^2C_4^2C_2^2$=90 种方法，其中甲、乙不在同一社区的分配方法共有 $C_4^1C_3^1C_2^2A_3^3$=72，所有甲、乙到同一社区的方案种数为 $90-72$=18 种．

【错因分析】

错选 A，将甲、乙分为同一组，剩余的 4 人平均分为两组，没有进行分配，导致错误；

错选 C，将除甲、乙外剩余的 4 人平均分为两组时误列为 $C_4^2C_2^2$，导致错误；

错选 D，先分组再分配时误算成 $C_4^2A_2^2A_3^3$，导致错误．

【难度属性】属于容易题．

5．甲、乙、丙三位同学参加学习脱贫干部黄文秀、戍边英雄陈红军、人民科学家南仁东、抗疫英雄张定宇等英雄的先进事迹知识竞赛．该竞赛共有十道判断题，三位同学的答题情况如下：

题号 / 选手	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	√	√	×	√	×	√	×	×	√	×
乙	√	√	×	×	√	×	√	√	×	×
丙	×	√	√	×	√	√	√	×	√	√

考试成绩公布后，三个人都答对了 7 道题，由此可知，1~10 题的正确答案依次是

A．√、√、×、×、√、√、√、×、√、×

B．√、√、×、×、√、×、√、×、√、×

C．√、√、×、×、√、√、√、√、√、×

D．√、×、×、×、√、√、√、√、√、×

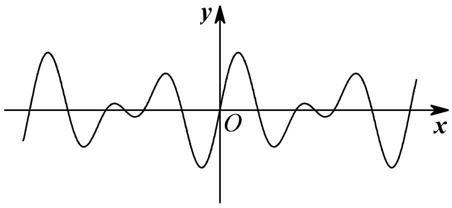
【答案】A.

【考查意图】本小题以学习英雄事迹为背景，要求考生依据三位学生的答题情况推理十道试题的正确答案，考查逻辑推理能力和创新能力等，考查逻辑推理等核心素养，体现基础性和应用性，渗透德育教育．

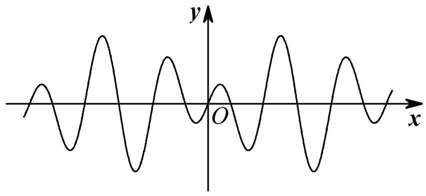
【答题分析】只要根据题意，将选项中与所给信息进行比对检验，即可解决问题；或者通过观察发现三人的答题情况的特征，进行合理推断，即可解决问题．

解法一：若 A 选项是正确的，则甲同学答题出错的题号分别是：4，5，7 三题，乙同学答

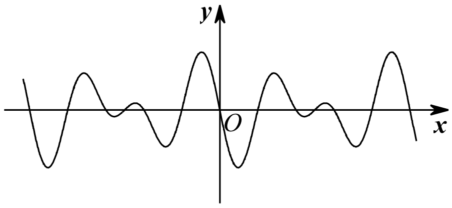
题出错的题号分别是：6，8，9 三题，丙同学答题出错的题号分别是：1，3，10 三题，符合题意．故选 A．
解法二：由题意得，三人一共错了 9 道题．观察发现，第 2 题三人答案相同，其余 9 道题中，每道题都是恰有两人答案相同，一人不同．故每题至少错一人，所以 9 道题一共至少错 9 题，从而第 2 题必然是三人全对，且其余 9 道题中，每题都是对两人，错一人．故正确答案应为√、√、×、×、√、√、√、×、√、×，故选 A．
【错因分析】
无法有效地通过先观察、发现规律，在经过严密的推理得出结论；也不能利用所给的选项代入检验得出结论．
【难度属性】属于中档题．
6．音乐是用声音来表达人的思想感情的一种艺术．声音的本质是声波，而声波在空气中的振动可以用三角函数来刻画．在音乐中可以用正弦函数来表示单音，用正弦函数相叠加表示和弦．某二和弦可表示为 $f\left(x\right)=\sin 2x+\sin 3x$，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象大致为



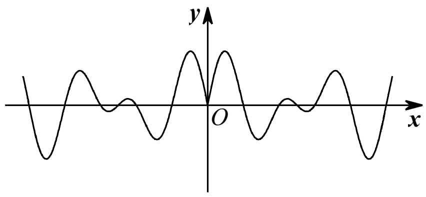
A



B

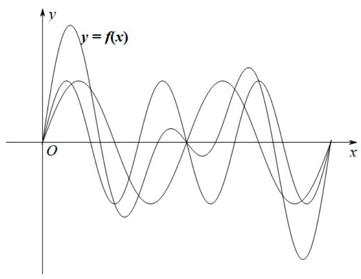


C



D

【答案】A
【考查意图】本小题以音乐中的声波函数为背景，以三角函数知识为载体，考查正弦函数的图象与性质等基础知识；考查直观想象能力、逻辑推理能力等，考查化归与转化思想、数形结合思想等，考查直观想象、数学抽象等核心素养，体现基础性，渗透美育教育．
【答题分析】分析函数 $f(x)$ 的奇偶性及周期性，通过作出两个函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin 3x$ 在一个周期内的图象，通过函数叠加的方法，可以得到函数 $f(x)$ 的大致图象．或者通过求出函数 $f(x)$ 的零点，考察零点之间的距离，并结合 $f(x)$ 的奇偶性及 $f(x)$ 的函数值符号，得到正确答案．



解法一：如图所示，作出两个函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin 3x$ 在一个周期内的图象，通过函数叠加可以得到函数 $f(x)$ 的大致图象，选 A．
解法二：因为 $f(x)$ 是奇函数，排除 D．
因为 $\exists x_0>0$，$\forall x\in(0,x_0)$，$f(x)>0$，排除 C．

令 $f(x)=0$，得 $\sin 2x=-\sin 3x$，所以 $\sin 2x=\sin(-3x)$，

则 $2x=-3x+2k\pi$ 或 $2x+(-3x)=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.即 $x=\dfrac{2}{5}k\pi$ 或 $x=-\pi-2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

考虑 $x\in\left[0,2\pi\right]$，则 $x=0$，$x=\dfrac{2\pi}{5}$，$x=\dfrac{4\pi}{5}$，$x=\pi$，$x=\dfrac{6\pi}{5}$，$x=\dfrac{8\pi}{5}$，$x=2\pi$.

从零点之间的距离大小可排除 B.

【错因分析】

错选 B，函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin 3x$ 的叠加情况判断出错.

错选 C，$f(x)$ 的函数值的正负符合判断出错.

错选 D，$f(x)$ 的奇偶性判断出错.

【难度属性】属于中档题.

7．已知实数 a,b 满足 $a=\mathrm{e}^{5-a}$，$2+\ln b=\mathrm{e}^{3-\ln b}$，则 $ab=$

A．3　　B．7　　C．e^3　　D．e^7

【答案】C

【考查意图】本小题以方程为载体，考查指、对数运算及相关函数的单调性等基础知识；考查逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现综合性和创新性.

【答题分析】

解法一：易知直线 $y=x$ 与 $y=\mathrm{e}^{5-x}$ 有且只有一个交点，且 $a=\mathrm{e}^{5-a},\ln b+2=\mathrm{e}^{5-(\ln b+2)}$，所以 $a=\ln b+2$，故 $ab=b(\ln b+2)=b\mathrm{e}^{3-\ln b}=\mathrm{e}^3$，选 C.

解法二：$a=\mathrm{e}^{5-a}$ 两边取自然对数得 $a+\ln a=5$，$\ln b+2=\mathrm{e}^{3-\ln b}$ 两边取自然对数得 $\ln(\ln b+2)=3-\ln b$，即 $\ln b+2+\ln(\ln b+2)=5$，而函数 $y=x+\ln x$ 是增函数，所以 $a=\ln b+2$，故 $ab=b(\ln b+2)=b\mathrm{e}^{3-\ln b}=\mathrm{e}^3$，选 C.

解法三：由 $a=\mathrm{e}^{5-a}$ 得 $\mathrm{e}^a=\dfrac{\mathrm{e}^5}{a}$，其中 $a>0$；$\ln\left(\mathrm{e}^2b\right)=\dfrac{\mathrm{e}^3}{b}=\dfrac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^2b}$，令 $t=\mathrm{e}^2b,t>0$，得 $\ln t=\dfrac{\mathrm{e}^5}{t}$.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，考察函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x,g\left(x\right)=\ln x,h\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^5}{x}$，

设 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-h\left(x\right)$，$G\left(x\right)=g\left(x\right)-h\left(x\right)$，则正数 a,t 分别为函数 $F\left(x\right)$，$G\left(x\right)$ 的零点.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递增，$h\left(x\right)$ 单调递减，故 $F\left(x\right)$ 单调递增，

又 $F\left(1\right)<0$，且 $F\left(\mathrm{e}^5\right)>0$，所以在 $x\in(0,+\infty)$，$F\left(x\right)$ 存在唯一的零点，即为 a，

记 $y_1=f\left(a\right)$，则 $P\left(a,y_1\right)$ 为两函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=h\left(x\right)$ 图象的公共点；

又同理得 $G\left(x\right)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 单调递增，又 $G\left(1\right)<0$，$G\left(\mathrm{e}^5\right)>0$，所以在 $x\in(0,+\infty)$，$G\left(x\right)$ 存在唯一的零点，即为 t，记 $y_2=g\left(t\right)$，则 $Q\left(t,y_2\right)$ 为两函数 $y=g\left(x\right)$ 与 $y=h\left(x\right)$ 图象的公共点.注意到 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\ln x$ 的图象关于 $y=x$ 对称，且 $y=\dfrac{\mathrm{e}^5}{x}$ 的图象也关于 $y=x$ 对称，故 P,Q 两点关于 $y=x$ 对称，即 $\begin{cases}a=y_2,\\t=y_1,\end{cases}$

又因为 $P\left(a,y_1\right)$ 在 $y=\dfrac{\mathrm{e}^5}{x}$ 图象上，故 $a\cdot y_1=\mathrm{e}^5$，即 $a\cdot t=\mathrm{e}^5$，即 $a\cdot\mathrm{e}^2b=\mathrm{e}^5$，得 $a\cdot b=\mathrm{e}^3$.

解法四：$\ln b+2=\mathrm{e}^{3-\ln b}$ 化简得 $b(\ln b+2)=\mathrm{e}^3$.设 $f(x)=x(\ln x+2)$，则 $f'(x)=\ln x+3$，所以 $x\in(0,\mathrm{e}^{-3})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in(\mathrm{e}^{-3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.而 $f(\mathrm{e})=3\mathrm{e}$，$f(\mathrm{e}^2)=4\mathrm{e}^2$，故 $b\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$.函数 $g(x)=x-\mathrm{e}^{5-x}$ 单调递增，且 $g(3)=3-\mathrm{e}^2<0$，$g(4)=4-\mathrm{e}>0$，所以 $a\in(3,4)$.因此 $ab\in(3\mathrm{e},4\mathrm{e}^2)$，可排除 A、B、D，故选 C.

【错因分析】

错选 A，$a=\mathrm{e}^{5-a}$ 两边取自然对数得 $a+\ln a=5$，$\ln b+2=\mathrm{e}^{3-\ln b}$，两边取自然对数得 $\ln(\ln b+2)=3-\ln b$，即 $\ln b+2+\ln(\ln b+2)=5$，而函数 $y=x+\ln x$ 是增函数，所以 $a=\ln b+2$，因此 $\ln(ab)=\ln a+\ln b=\ln a+a-2=3$，但忘记把 $\ln(ab)$ 的值转为 ab 的值.

错选B，得到 $a=\ln b+2$ 的过程与选A的相同，只是在计算 $\ln(ab)=\ln a+\ln b=\ln a+a+2=7$ 时，因符号化反了，也忘记把 $\ln(ab)$ 的值转为 ab 的值.

错选 D，与选 B 的计算错误相同，不同的是把 $\ln(ab)$ 的值转为 ab 的值.

【难度属性】属于中档题.

8．某地举办“迎建党 100 周年”乒乓球团体赛，比赛采用新斯韦思林杯赛制（5 场单打 3 胜制，即先胜 3 场者获胜，比赛结束）．现有两支球队进行比赛，前 3 场依次分别由甲、乙、丙和 A、B、C 出场比赛．若经过 3 场比赛未分出胜负，则第 4 场由甲和 B 进行比赛；若经过 4 场比赛仍未分出胜负，则第 5 场由乙和 A 进行比赛. 假设甲与 A 或 B 比赛，甲每场获胜的概率均为 0.6；乙与 A 或 B 比赛，乙每场获胜的概率均为 0.5；丙与 C 比赛，丙每场获胜的概率均为 0.5；各场比赛的结果互不影响．那么，恰好经过 4 场比赛分出胜负的概率为

A．0.24　　B．0.25　　C．0.38　　D．0.5

【答案】C.

【考查意图】本小题以乒乓球比赛问题为载体，考查独立事件、互斥事件的概率等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力、数学建模能力等，考查统计与概率思想，分类与整合思想，化归与转化思想等，考查数学运算、逻辑推理、数学建模和数学抽象等核心素养，体现基础性和应用性，渗透体育教育.

【答题分析】只要能通过阅读理解比赛的规则，将所求事件分成甲所在球队获胜和 A 所在球队获胜这两类．分析得到获胜的球队必在最后一场比赛中获胜，且前三场比赛恰有两场获胜，进而分别利用相互独立事件的概率公式求出相应概率，再利用互斥事件的概率加法公式即可得出结论.

解法：记“恰好经过 4 场比赛分出胜负”、“恰好经过 4 场比赛甲所在球队获胜”、“恰好经过 4 场比赛 A 所在球队获胜”分别为事件 D、E、F. 则 E，F 互斥，且 $P(D)=P(E)+P(F)$.

若事件 E 发生，则第四场比赛甲获胜，且前 3 场比赛甲所在球队恰有一场比赛失利，由于甲对 A、B 比赛每场获胜的概率均为 0.6；乙对 A 比赛每场获胜的概率为 0.5；丙对 C 比赛每场获胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，所以甲所在球队恰好经过 4 场比赛获得胜利的概率为 $P(E)=0.6\times\left(0.4\times0.5\times0.5+0.6\times C_2^1\times0.5\times0.5\right)=0.24$，

若事件 F 发生，则第四场比赛 B 获胜，且前 3 场比赛 A 所在球队恰有一场比赛失利，由于甲对 A、B 比赛每场获胜的概率均为 0.6；乙对 A 比赛每场获胜的概率为 0.5；丙对 C 比赛每场获胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，所以 A 所在球队恰好经过 4 场比赛获得胜利的概率为 $P(F)=0.4\times\left(0.6\times0.5\times0.5+0.4\times C_2^1\times0.5\times0.5\right)=0.14$，

所以 $P(D)=P(E)+P(F)=0.38$，　故选 C.

【错因分析】

错选 A，审题不到位，误认为甲所在球队获胜；
错选 B，错将甲所在球队获胜时前三场中乙或丙失利的概率算成$0.6\times0.5\times0.5$，且将 A 所在球队获胜时前三场中 B 或 C 失利的概率算成$0.4\times0.5\times0.5$；
错选 D，错将事件“恰好经过 4 场比赛分出胜负”理解成 4 场比赛中获胜球队恰好胜三场.
【难度属性】属于中档题.

9．已知$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\tan\alpha+\tan\beta$，其中$\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$且$\beta\neq\dfrac{m\pi}{2}\left(m\in\mathbf{Z}\right)$，则下列结论一定正确的是

A．$\sin\left(\alpha+\beta\right)=0$　　B．$\cos\left(\alpha+\beta\right)=1$

C．$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}=1$　　D．$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$

【答案】AD
【考查意图】本小题以角的正切关系为载体，考查三角恒等变换等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想等，考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性和综合性。
【答题分析】可以由条件得到$\tan\alpha+\tan\beta=0$，从而$\alpha+\beta=k\pi,k\in Z$，再逐项分析；或利用特殊值排除两个选项，即可得出正确选项.
解法一：由条件得，$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$，从而得到$\tan\alpha+\tan\beta=0$，
所以$\alpha=k\pi-\beta,k\in\mathbf{Z}$，即$\alpha+\beta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以$\sin\left(\alpha+\beta\right)=0$，故 A 正确.
对于 B 选项，由于$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\left(k\pi\right)=\pm1$，故 B 错误；
对于 C 选项，因为$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}=\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)+\sin^2\dfrac{\beta}{2}$，当$k$为偶数时，
$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}=\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)+\sin^2\dfrac{\beta}{2}=\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}=2\sin^2\dfrac{\beta}{2}$，故 C 错误.
对于 D 选项，又$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=\sin^2\left(k\pi-\beta\right)+\cos^2\beta=\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，所以 D 正确.
解法二：由条件得，$\dfrac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\alpha\cos\beta}$，所以$\sin\left(\alpha+\beta\right)=0$，或$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta$，即$\sin\left(\alpha+\beta\right)=0$或$\sin\alpha\sin\beta=0$（由条件舍），故 A 正确；其余解法同解法一.
解法三：取$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，可判断$\cos\left(\alpha+\beta\right)=-1$，故 B 错误，取$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=-\dfrac{\pi}{4}$，
$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}\neq1$，故 C 错误，故只能 A,D 正确.
【错因分析】
漏选 A，将$\sin k\pi$的值错记为 1；
错选 B，只考虑$\alpha+\beta=k\pi,k\in Z$中k为奇数的情况，而事实上$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\left(k\pi\right)=\pm1$；
错选 C，得到$\alpha+\beta=k\pi,k\in Z$时，忽略了$\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$中$k$为偶数的情况；
漏选 D，将$\alpha+\beta=k\pi,k\in Z$代入$\sin^2\alpha+\cos^2\beta$时错误得到$-\sin^2\alpha+\cos^2\beta\neq1$，导致漏选.
【难度属性】属于容易题.

10．函数 $f(x)$ 的定义域为 I．若 $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in I$ 均有 $|f(x)|<M$，且函数 $f(x+1)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 可以是

A．$f(x)=\left|\ln\dfrac{x}{2-x}\right|$　　　　B．$f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+\cos(2\pi x)$

C．$f(x)=\dfrac{1}{2^x+2}-\dfrac{1}{4}$　　　　D．$f(x)=\begin{cases}0, x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},\\ 1, x\in\mathbf{Q}\end{cases}$

【答案】BD

【考查意图】本小题以抽象函数的性质为载体，考查具体初等函数的图象与性质等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查函数与方程思想、数形结合思想等，考查数学抽象、数学运算、逻辑推理、直观想象等核心素养，体现基础性和综合性.

【答题分析】只要理解所给条件的含义，再逐项分析；或根据函数的性质排除两个选项即可得到正确选项.

解法一：对于 A 选项，因为 $f(x)$ 函数的值域为 $[0,+\infty)$，所以 A 错误；

对于 B 选项，$f(x+1)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x+1)\right)+\cos\big(2\pi(x+1)\big)=\cos\dfrac{\pi}{2}x+\cos 2\pi x$，易知该函数为偶函数，由三角函数的有界性知，存在正实数 M，满足 $|f(x)|<M$，故 B 正确；

对于 C 选项，由条件得 $f(x+1)=\dfrac{1}{2^{x+1}+2}-\dfrac{1}{4}=g(x)$，

由于 $g(x)-g(-x)=\dfrac{1}{2^{x+1}+2}-\dfrac{1}{2^{-x+1}+2}=\dfrac{1-2^x}{2(2^x+1)}$，$\therefore f(x+1)$ 不是偶函数，故 C 错误；

对于 D 选项，由条件知，$f(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$，满足存在正实数 M，满足 $|f(x)|<M$，且 $f(x+1)=\begin{cases}0, x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},\\ 1, x\in\mathbf{Q}\end{cases}$，故 $f(x+1)$ 为偶函数，故 D 正确.

解法二：对于 A 选项，由于 $f(x)$ 函数的值域为 $[0,+\infty)$，所以错误；由 $f(x+1)$ 为偶函数，可知 $f(x+1)=f(-x+1)$，即 $f(x)=f(2-x)$，但对于 C 选项，$f(0)=\dfrac{1}{12}, f(2)=-\dfrac{1}{12}$，矛盾，故错误；于是可知正确选项为 BD.

【错因分析】

错选 A，错误地求出 $f(x+1)=\left|\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)\right|=\left|\ln\left(-1-\dfrac{2}{x-1}\right)\right|$ 值域为 $[0,\ln 2]$；

漏选 B，将 $f(x+1)$ 错误地化简为 $f(x+1)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+\cos(2\pi x)$，故错误地判断 $f(x+1)$ 不是偶函数；

错选 C，错认为 $f(x+1)=\dfrac{1}{2^{x+1}+2}-\dfrac{1}{4}$ 为偶函数，且值域为 $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，满足条件，故而错选；

漏选 D，不理解该函数所表示的意义.

【难度属性】属于中档题.

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为 AA_1 的中点，平面 α 过点 D_1 且与 CM 垂直，则

A． $CM \perp BD$　　　　B． BD // 平面 α

C．平面 C_1BD // 平面 α　　　　D．平面 α 截正方体所得的截面面积为 $\dfrac{9}{2}$

【答案】ABD

【考查意图】本小题以正方体为载体，考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力等，考查直观想象、逻辑推理等核心素养，体现基础性与综合性.

【答题分析】从空间点线面的平行与垂直的判定与性质出发，综合分析其内在逻辑关系；或从判定线面垂直的思路方法出发，找到正方体侧面 AA_1D_1D 和底面 $ABCD$ 内与 CM 成垂直关系的线，确定平面 α 截正方体的截面，便可做出准确判断和计算.

解法一：因为 $BD \perp AC$， $BD \perp AM$， $AM \cap AC = A$，

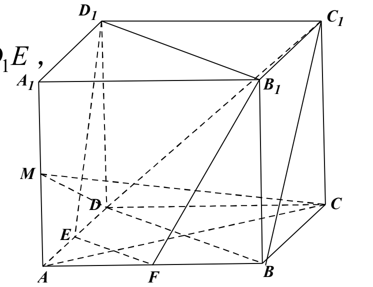
所以 $BD \perp$ 面 AMC，所以 $BD \perp CM$，故 A 正确.

取 AD 中点 E，由平面几何知识可得 $D_1E \perp DM$，又 $CD \perp D_1E$，

$DM \cap CD = D$，所以 $D_1E \perp$ 面 CDM，所以 $D_1E \perp CM$，

过点 E 作 EF // BD，所以 $CM \perp EF$， $D_1E \cap EF = F$，

所以 $CM \perp$ 平面 D_1EFB_1，所以平面 α 截正方体所得的截面即为梯形 D_1EFB_1，如图所示.



由 EF // BD， $BD \not\subset \alpha$， $EF \subset$ 平面 α，得 BD // 平面 α，故 B 正确.

因为平面 AB_1D_1 // 平面 C_1BD，而平面 $AB_1D_1 \cap$ 平面 $\alpha = B_1D_1$，

则平面 C_1BD 与平面 α 不平行，故 C 不正确.

因为截面为梯形 D_1EFB_1，通过数量关系计算可得截面面积恰为 $\dfrac{9}{2}$，故 D 正确.

解法二：因为 $BD \perp AC$，$BD \perp AM$，$AM \cap AC = A$，所以 $BD \perp$ 平面 AMC，所以 $BD \perp CM$，故 A 正确.

若 $BD \subset \alpha$，则平面 α 即为平面 BDD_1B_1，所以 $CM \perp DD_1$，所以 $CM \perp AA_1$，这不可能，所以 $BD \not\subset \alpha$，又因为 $BD \perp CM$， $CM \perp \alpha$，则 BD // 平面 α，故 B 正确.

若平面 C_1BD // 平面 α，则 $CM \perp$ 平面 C_1BD，所以 $CM \perp BC_1$，

所以 $CM \perp AD_1$，因为 $CD \perp AD_1$，所以 $AD_1 \perp$ 平面 CDM，所以 $AD_1 \perp DM$，这不可能，故 C 不正确.

D 选项的判断同解法一.

【错因分析】

漏选 A，未能得到 CM 在底面 $ABCD$ 上的射影为 AC.

漏选 B，不能得到 $BD \perp CM$ 且 $BD \not\subset$ 平面 α，或不能准确找到平面 α 与底面 $ABCD$ 的交线.

错选 C，误认为平面 α 即为平面 AB_1D_1.

漏选 D，不能有效从线面垂直的判定的角度出发，准确画出平面 α 截正方体所得截面图形.

【难度属性】属于中等题.

12．已知抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F，准线 l 交 x 轴于点 C，直线 m 过 C 且交 E 于不同的 A, B 两点， B 在线段 AC 上，点 P 为 A 在 l 上的射影．下列命题正确的是

A．若 $AB \perp BF$，则 $|AP| = |PC|$　　　　B．若 P, B, F 三点共线，则 $|AF| = 4$

C．若 $|AB| = |BC|$，则 $|AF| = 2|BF|$　　　　D. 对于任意直线 m，都有 $|AF| + |BF| > 2|CF|$

【答案】BCD.

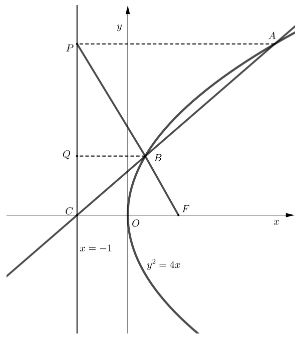
【考查意图】本小题以抛物线为载体，考查抛物线的定义、直线与抛物线的位置关系、基本不等式等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力等，考查数形结合思想、函数与方程思想等，考查数学运算、直观想象等核心素养；体现综合性.

【答题分析】只要作出图形，根据已知条件写出直线m的方程，联立直线与抛物线E的方程，利用韦达定理得到x_1与x_2的关系，逐项分析即可得出结论，对于A选项，还可以利用反证法进行分析.

解法一：由已知条件可得$F(1,0)$，$C(-1,0)$.

由抛物线的对称性，不妨设直线m的方程为$y=k(x+1)(k>0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

依题意$x_1>x_2$，由$\begin{cases}y=k(x+1),\\ y^2=4x\end{cases}$整理，得$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$.



当$\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=16-16k^2>0$，即$0<k<1$时，由韦达定理，

得$x_1+x_2=\dfrac{4-2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$.

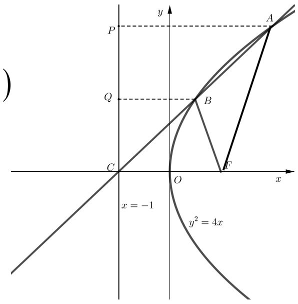
对于A选项，因为直线BF的斜率为$\dfrac{y_2}{x_2-1}$，$AB\perp BF$，

所以$k\cdot\dfrac{y_2}{x_2-1}=-1$，即$\dfrac{y_2}{x_2-1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+1}=-1$.

又${y_2}^2=4x_2$，所以${x_2}^2+4x_2-1=0$，解得$x_2=\sqrt{5}-2$，所以$x_1=\sqrt{5}+2$.

所以$|AP|=|AF|=\sqrt{5}+3$，$|PC|=y_1=\sqrt{8+4\sqrt{5}}$，

故$|AP|\neq|PC|$. 故A错误；



对于B选项，易得$P(-1,y_1)$，所以$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$，$\overrightarrow{FP}=(-2,y_1)$

当P,B,F三点共线时，$y_1(x_2-1)+2y_2=0$，

所以$k(x_1+1)(x_2-1)+2k(x_2+1)=0$，$x_1x_2+3x_2-x_1+1=0$.

由$x_1x_2=1$和$x_1x_2+3x_2-x_1+1=0$解得$x_1=3$，

所以$|AF|=x_1+1=4$. 故B正确；

对于C选项，过B作$BQ\perp l$，垂足为Q. 由已知可得$AP/\!/BQ$，

所以$\dfrac{|BQ|}{|AP|}=\dfrac{|BC|}{|AC|}$. 又$|AB|=|BC|$，所以$|AP|=2|BQ|$. 由抛物线的定义，得$|AF|=|AP|$，$|BF|=|BQ|$. 因此$|AF|=2|BF|$. 故C正确；

对于D选项，因为$|AF|=x_1+1$，$|BF|=x_2+1$，

所以$|AF|+|BF|=x_1+x_2+2\geqslant 2\sqrt{x_1x_2}+2=4$，又$x_1\neq x_2$，$|CF|=2$，

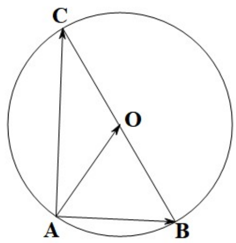
故$|AF|+|BF|>2|CF|$成立. 故D正确.

解法二：对于选项A，假设$|AP|=|PC|$成立，则$\triangle APC$为等腰直角三角形，$\angle ACP=45°$，$\angle ACF=45°$. $AB\perp BF$，所以$\triangle BCF$为等腰直角三角形，则点B在y轴上，这与已知条

件显然矛盾，故$|AP| \neq |PC|$．故 A 错误，其他选项同解法一进行判断.

【错因分析】
错选 A，直接通过作图直观判断导致错误；
漏选 B，记错焦半径公式，从而漏选；
漏选 C，搞错点A,B的位置，从而误得到$|BF| = 2|AF|$，漏选；
漏选 D，利用基本不等式时，认为可以取等号.
【难度属性】属于难题.
13．曲线$y=(x+1)\ln(1+x)$在$x=0$处的切线方程为______.
【答案】$y=x$（或写成$x-y=0$）.
【考查意图】本小题考查导数的运算、导数的几何意义等基础知识，考查运算求解能力等，考查函数与方程思想等，考查数学运算等核心素养，体现基础性.
【答题分析】利用导数几何意义求出切线的斜率，然后利用点斜式写出切线方程.
解法：$y'=\ln(1+x)+1$，所以曲线在$x=0$处的切线斜率为1，又求得切点为$(0,0)$，所以所求切线方程为$y=x$.
【错因分析】求导运算出错.
【难度属性】属于容易题.
14．已知△ABC的外心为O，$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}|=1$，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=$______.

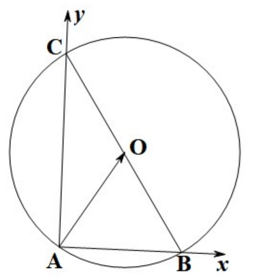
【答案】$\frac{3}{2}$.
【考查意图】本小题以平面向量为载体，考查向量的加法、数乘运算及其几何意义，平面向量的数量积等基础知识；考查运算求解能力、直观想象能力等，考查数形结合思想、化归与转化思想等，考查数学抽象、直观想象和数学运算等核心素养；
体现基础性和综合性.



【答题分析】由$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，得$O$为线段$BC$的中点，又因为$O$为△$ABC$的外心，则$BC$为圆$O$的直径，又由$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}|=1$，可求得向量$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{AC}$的模长与夹角，从而可计算$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$的值.也可考虑用坐标法或数量积的几何意义进行求解.
解法一：由$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，得$O$为线段$BC$的中点，又因为$O$为△$ABC$的外心，则$BC$为圆$O$的直径，又由$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}|=1$得△$OAB$为等边三角形，$\angle B=60^\circ$，

$|\overrightarrow{BC}|=2$，则$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$，

$\angle OAC=30^\circ$，所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ=\frac{3}{2}$.



解法二：同解法一可得△OAB为等边三角形，$\angle B=60^\circ$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，

则$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$，建立如图所示的平面直角坐标系，

易得$A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,\sqrt{3}),\ O(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

所以$\overrightarrow{AO}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3})$，所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}$.

解法三：同解法一可得$\triangle OAB$为等边三角形，$\angle B=60^{\circ}$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，则$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$，所以$\overrightarrow{AO}$在$\overrightarrow{AC}$方向上的投影为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，由数量积的几何意义得$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$.

【错因分析】不能通过向量关系$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，得到三角形的外心为$BC$边的中点，从而无法得出$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，导致错误；对向量运算的几何意义理解不够，不能有效找到相应的几何关系导致错误；向量关系转化为几何关系过程中，向量的模、夹角出错.

【难度属性】属于容易题.

15．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，以原点$O$为圆心、$C$的焦距为半径的圆交$x$轴于$A,B$两点，$P$ 是圆O与C的一个公共点. 若$|PA|=\sqrt{3}|PB|$，则C的离心率为______.

【答案】$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$.

【考查意图】本小题以圆与双曲线为载体，考查圆的性质、双曲线的定义及简单几何性质等基础知识，考查运算求解能力、直观想象能力和逻辑推理能力等；考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想等；考查数学运算、逻辑推理、直观想象等核心素养；体现综合性和创新性.

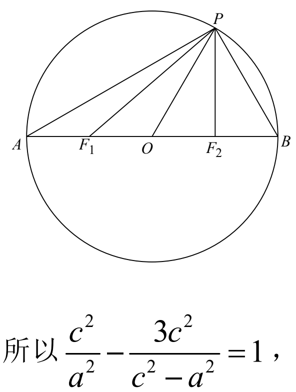
【答题分析】只要根据圆的性质得到$\triangle PAB$为直角三角形，进一步推出$\angle PBA=60^{\circ}$. 从而$\triangle POB$为等边三角形，点P在x轴的投影为焦点F_2，然后利用双曲线的定义即可求得其离心率；或者通过得到点P的坐标，代入双曲线方程，即可得到a,b,c的关系式，利用$b^2=c^2-a^2$消元后，再转化为关于离心率的方程，亦可求解.

解法一：设F_1、F_2为双曲线C的左、右焦点，焦距为$2c\left(c>0\right)$. 根据已知条件作图如下，

在$\text{Rt}\triangle APB$中，$|AB|=4c$，$|PA|=\sqrt{3}|PB|$，可求得$|PB|=|OP|=|OB|=2c$.

又F_2为OB的中点，所以$PF_2\perp OB$，$|PF_2|=\sqrt{3}c$. 又$|F_1F_2|=2c$，所以$|PF_1|=\sqrt{7}c$.

由双曲线的定义得$|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{7}c-\sqrt{3}c=2a$，



所以C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$.

解法二:在$\text{Rt}\triangle APB$中，$|AB|=4c$，$|PA|=\sqrt{3}|PB|$，

可求得$|PB|=|OP|=|OB|=2c$.

所以$\angle PBO=60^{\circ}$，不妨设点P的坐标为$\left(c,\sqrt{3}c\right)$，

代入方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，得$\frac{c^2}{a^2}-\frac{3c^2}{b^2}=1$，又$b^2=c^2-a^2$，所以$\frac{c^2}{a^2}-\frac{3c^2}{c^2-a^2}=1$，化简，得

$e^4-5e^2+1=0$，解得 $e^2=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$，$e=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$，所以 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$.

解法三: 在 $\mathrm{Rt}\triangle APB$ 中，$|AB|=4c$，$|PA|=\sqrt{3}|PB|$，可求得 $|PB|=|OP|=|OB|=2c$.

所以 $\angle PBO=60°$，不妨设点 P 的坐标为 $\left(c,\sqrt{3}c\right)$.

在方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，令 $x=c$，得 $y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，所以 $\sqrt{3}c=\dfrac{b^2}{a}$，

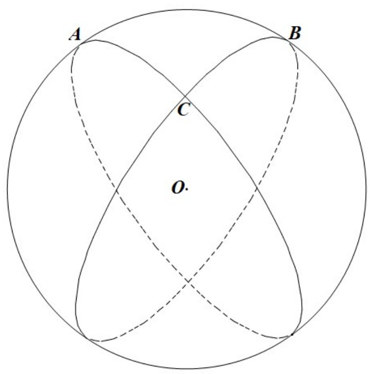
又 $b^2=c^2-a^2$，所以 $c^2-a^2-\sqrt{3}ac=1$，化简，得 $e^2-\sqrt{3}e-1=0$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$，

所以 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$.

【错因分析】误认为焦距是 c；误将双曲线中 a,b,c 的关系记成 $a^2=b^2+c^2$；误认为双曲线的离心率小于1；计算错误等.

【难度属性】属于中档题.

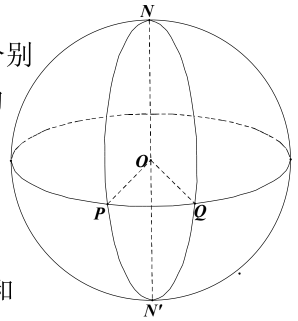
16. 球面几何是几何学的一个重要分支，在航海、航空、卫星定位等方面都有广泛的应用. 如图，A,B,C 是球面上不在同一大圆（大圆是过球心的平面与球面的交线）上的三点，经过这三点中任意两点的大圆的劣弧分别为 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA}$，由这三条劣弧组成的图形称为球面 $\triangle ABC$. 已知地球半径为 R，北极为点 N，P,Q 是地球表面上的两点. 若 P,Q 在赤道上，且经度分别为东经 $40°$ 和东经 $80°$，则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为______；若 $NP=NQ=PQ=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R$，则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为______.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）



【答案】 $\dfrac{2}{9}\pi R^2$； πR^2

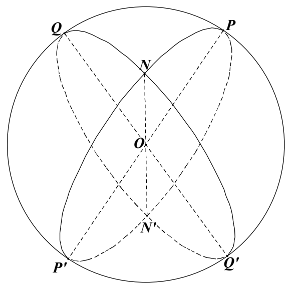
【考查意图】本小题以球面三角形为学习情境，通过对球面三角形的面积的求解，考查球、二面角等基础知识；考查空间想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力等；考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等；考查直观想象、逻辑推理、数学运算、数学抽象等核心素养；体现基础性、综合性和创新性.

【答题分析】第一空只要理解球面三角形的定义，通过几何图形的分割，就能发现当P,Q在赤道上，且经度分别为东经40°和东经80°时，二面角$P-ON-Q$为$\frac{2}{9}\pi$，所以球面三角形的面积恰好是对应的月牙形面积的一半，从而是球的表面积的$\frac{1}{18}$，即可求得第一空结果为$\frac{2}{9}\pi R^2$；第二空则需要通过前面一空的学习情境，将方法进行迁移，利用割补的思想找到球面三角形和月牙形的面积以及球的表面积的关系，再求出相应的二面角并利用月牙形的面积和二面角的关系便能求得第二空结果为πR^2.



解：（1）作出球的一条直径NN'，由于P,Q在赤道上，且经度分别为东经40°和东经80°，则球面△NPQ的面积是月牙形$NPN'Q$的一半，且二面角$P-ON-Q$为$\frac{2}{9}\pi$，所以月牙形$NPN'Q$的面积是球的表面积的$\frac{1}{9}$，从而球面△NPQ的面积为$\frac{2}{9}\pi R^2$；

（2）如图，作出球的直径NN',PP',QQ'，则相应的球面三角形和月牙形的面积有如下关系：



$S_{球面\triangle NPQ}+S_{球面\triangle Q'NP}=S_{月牙形QNQ'P}$；

$S_{球面\triangle NPQ}+S_{球面\triangle P'QN}=S_{月牙形PNP'Q}$；

$S_{球面\triangle N'P'Q'}+S_{球面\triangle Q'NP'}=S_{月牙形NQ'N'P'}$；

三式相加得，

$$2S_{球面\triangle NPQ}+S_{球面\triangle N'P'Q'}+S_{球面\triangle Q'NP}+S_{球面\triangle P'QN}+S_{球面\triangle Q'NP'}$$
$$=S_{月牙形QNQ'P}+S_{月牙形PNP'Q}+S_{月牙形NQ'N'P'}$$

由对称性知，$S_{球面\triangle NPQ}=S_{球面\triangle N'P'Q'}$，

所以$3S_{球面\triangle NPQ}+S_{球面\triangle Q'NP}+S_{球面\triangle P'QN}+S_{球面\triangle Q'NP'}=S_{月牙形QNQ'P}+S_{月牙形PNP'Q}+S_{月牙形NQ'N'P'}$，

因为球面△NPQ，球面△$Q'NP$，球面△$P'QN$，球面△$Q'NP'$恰好组成一个半球，

所以$S_{球面\triangle NPQ}+S_{球面\triangle Q'NP}+S_{球面\triangle P'QN}+S_{球面\triangle Q'NP'}=2\pi R^2$，

所以$2S_{球面\triangle NPQ}+2\pi R^2=S_{月牙形QNQ'P}+S_{月牙形PNP'Q}+S_{月牙形NQ'N'P'}$，

设球心为O，二面角$N-QO-P$，二面角$Q-OP-N$，二面角$Q-ON-P$分别为α,β,γ，

则$S_{月牙形QNQ'P}=\frac{\alpha}{2\pi}\times 4\pi R^2=2\alpha R^2, S_{月牙形PNP'Q}=\frac{\beta}{2\pi}\times 4\pi R^2=2\beta R^2$，

由对称性知，二面角$Q'-ON-P'$等于二面角$Q-ON-P$，所以$S_{月牙形NQ'N'P'}=2\gamma R^2$，

下面，我们求α,β,γ，如图，由于$NP=NQ=PQ=\frac{2\sqrt{6}}{3}R$，三棱锥$O-NPQ$为正三棱锥，

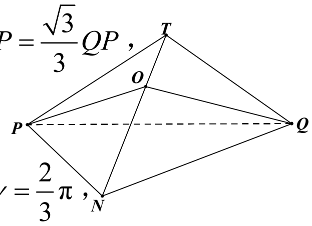
由对称性知，$\alpha=\beta=\gamma$，作$QT\perp ON$，垂足为T，连接PT，则$PT\perp ON$，

所以$\angle QTP=\gamma$，因为$NQ=\frac{2\sqrt{6}}{3}R, OQ=ON=R$，所以，在△$OQN$中，由余弦定理得，

$\cos\angle QON=\frac{OQ^2+ON^2-QN^2}{2OQ\cdot ON}=-\frac{1}{3}$，所以，$\angle QON$是钝角，所以$T$在$NO$延长线上，

设$OT=x$，则$QT^2=OQ^2-OT^2=QN^2-NT^2$，即$R^2-x^2=\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R\right)^2-(R+x)^2$，

解得$x=\dfrac{1}{3}R$，所以$QT=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$，所以$TP=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$，所以$QT=TP=\dfrac{\sqrt{3}}{3}QP$，



在△QTP中，由余弦定理得，$\cos\angle QTP=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\angle QTP=\dfrac{2}{3}\pi$，（也可利用等腰三角形进行计算），故$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{2}{3}\pi$，

所以$S_{月牙形MNM'P}+S_{月牙形PNP'M}+S_{月牙形NM'P'N'}=4\pi R^2$，球面△$MNP$的面积为$\pi R^2$．

【错因分析】不能正确理解题意，对所求解的球面三角形的面积的认识有误，第一空由于阅读理解能力较差，无法理解相关概念或误认为该球面三角形的面积是球的面积的$\dfrac{1}{9}$导致错误；第二空由于无法根据第一空的提示进行有效迁移，不懂如何入手导致错误；或空间想象能力较差，尽管能得到二面角和相应月牙形面积与球的表面积的关系，但无法通过割补并利用对称性研究球面三角形和月牙形的面积以及球的表面积的关系等等；计算错误．

【难度属性】第一空属于中档题，第二空属于难题．

17．（10分）

在①$b\sin A+a\cos B=0$，②$\sqrt{5}\cos 2C+3\cos C=0$，③$\sin B+\sin C=2\sin A$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求△ABC的面积；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在△ABC，其内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$a=4$，________？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

【考查意图】本题以结构不良问题为载体，主要考查正弦定理、余弦定理、三角形面积公式及三角恒等变换等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想等，考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性和综合性．

【解法综述】只要掌握正弦、余弦定理和面积公式等就能顺利求解，若能选择合适的条件及相应公式通过合理转化便能快捷解决问题．

思路一：选①$b\sin A+a\cos B=0$，应用正弦定理将其转化为$\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$，进而利用正切求得$B=\dfrac{3\pi}{4}$，结合$y=\cos x$在$(0,\pi)$单调递减，得到$A+B>\pi$，与△$ABC$内角和为$\pi$矛盾，从而不存在符合题意的△$ABC$．

思路二：选①$b\sin A+a\cos B=0$，应用正弦定理将其转化为$\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$，进而利用辅助角公式求得$B=\dfrac{3\pi}{4}$，再利用诱导公式求得$\sin C=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}<0$，与$\sin C>0$矛盾，从而不存在符合题意的△$ABC$．

思路三：选①$b\sin A+a\cos B=0$，应用正弦定理将其转化为$\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$，进而利用正切求得$B=\dfrac{3\pi}{4}$，再根据正弦定理求得$b=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}<4$，进而得到$B<A$，从而得出矛盾，不存在符合题意的△$ABC$．

思路四：选② $\sqrt{5}\cos 2C+3\cos C=0$，应用二倍角公式化简可得 $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，利用同角三角函数基本关系可得 $\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin A=\dfrac{4}{5}$，再结合正弦定理可得 $c=2\sqrt{5}$，利用诱导公式及两角和的正弦公式可求得 $\sin B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，从而△$ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=8$.

思路五：选③ $\sin B+\sin C=2\sin A$，应用正弦定理将其转化为 $b+c=2a$，结合余弦定理便可求得 $bc=15$，利用同角三角函数基本关系可求得 $\sin A=\dfrac{4}{5}$，从而△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=6$.

【错因分析】选①，得到 $B=\dfrac{3\pi}{4}$ 后不知从何入手，无法得出矛盾或思维不严谨导致错误；选②由于计算能力不足，无法求出 $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，导致解题受阻；选③不能将余弦定理中的 b^2+c^2 变形为 $\left(b+c\right)^2=b^2+c^2-2bc$ 求得 $bc=15$，导致解题受阻等.

【难度属性】属于中档题.

18.（12 分）

数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）若数列 $\left\{a_n+1\right\}$ 不是等比数列，求 a_n；

（2）若 $a_1=1$，在 a_k 和 a_{k+1} $\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 中插入 k 个数构成一个新数列 $\left\{b_n\right\}$：$a_1,1,a_2,3,5,a_3,7,9,11,a_4,\cdots$，插入的所有数依次构成首项为 1，公差为 2 的等差数列，求 $\left\{b_n\right\}$ 的前 50 项和 T_{50}.

第 18 题（1）

【考查意图】本小题主要考查等比数列、递推数列等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和创新性.

【解法综述】只要掌握 a_n 与 S_n 的关系，等比数列的定义、通项公式，通过合理的递推转化即可顺利求解.

思路一：利用 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ 将 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n$ 转化为 $a_{n+1}=2a_n+1$，然后根据问题的提示，将其变形为 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，结合等比数列的定义进行分类便可得到结论；

思路二：利用数列与函数的关系，由 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n$ 可得 $n\ge 2$ 时，$S_n-1=S_{n-1}+2a_{n-1}$，两式相减得 $n\ge 2$ 时，$a_{n+1}=a_n+2a_n-2a_{n-1}$，将其变形为 $a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}$，进而得到 $a_n-2a_{n-1}=a_2-2a_1$，结合 $n=1$ 时，$S_2-1=S_1+2a_1$ 可得 $a_2-2a_1=1$，于是 $n\ge 2$ 时，$a_n-2a_{n-1}=1$，将其变形为 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$，结合等比数列的定义进行分类便可得到结论；

思路三：同思路二可得 $n\ge 2$ 时，$a_{n+1}=a_n+2a_n-2a_{n-1}$，从而 $a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})$，由此可得 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}(a_2-a_1)$，利用累加法可得 $a_n+1=(a_2-a_1)2^{n-1}+2a_1-a_2+1$，结合当 $n=1$ 时，$S_2-1=S_1+2a_1$，得 $a_2=2a_1+1$，从而 $a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}$，结合等比数列的定义进行

分类便可得到结论；

【错因分析】不会利用 a_n 与 S_n 的关系，将 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n$ 转化为 $a_{n+1}=2a_n+1$；或用思路二得到 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}=a_n+2a_n-2a_{n-1}$ 后无法继续变形，导致解题受阻；或得到 $a_{n+1}=2a_n+1$ 后不会结合等比数列的定义进行分类讨论，说理不够严谨等.

【难度属性】属于中档题.

第 18 题（2）

【考查意图】本小题主要考查等差数列、等比数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和创新性.

【解法综述】只要理解所给数列的定义，掌握等比数列通项公式及前 n 项和，等差数列的通项公式及前 n 项和，并能分析出 $b_1,b_2,\cdots,b_{50}$ 中各项的构成即可顺利求解.

思路：利用 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ 将 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n$ 转化为 $a_{n+1}=2a_n+1$，进而求得 $a_n=2^n-1$. 根据数列特征分析发现，$1+2+3+\cdots+8=36$，$36+9=45<50$，$1+2+3+\cdots+8+9=45$，$45+10=55>50$，从而 $b_1,b_2,\cdots,b_{50}$ 中包含 $\{a_n\}$ 的前 9 项及 $\{c_n\}$ 的前 41 项，再进行分组，利用等差数列和等比数列的前 n 项和公式即可求得 $T_{50}=2694$.

【错因分析】不能分析出 $b_1,b_2,\cdots,b_{50}$ 中各项的构成，导致解题受阻；或在求和时出现计算错误等.

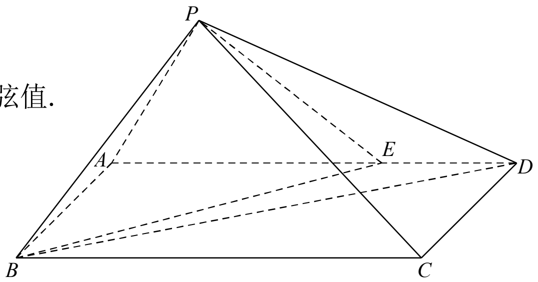
【难度属性】属于中档题.

19.（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，E 是边 AD 上的点，$PA=AB=AE=2DE$，$\angle PBA=\angle PBC=60°$.

（1）求证：平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求直线 PC 和平面 PBD 所成角的正弦值.



第 19 题（1）

【考查意图】本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识；考查空间想象能力，逻辑推理能力等；考查化归与转化思想，数形结合思想等；考查直观想象，逻辑推理等核心素养；体现基础性和综合性.

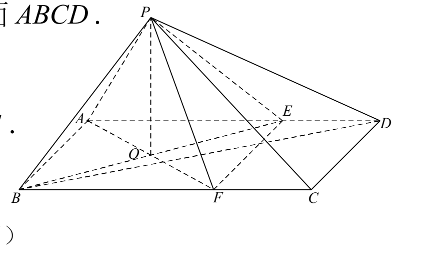
【解法综述】只要掌握面面垂直的判定定理，利用面面垂直的性质定理，只要在平面 $ABCD$ 或平面 PBE 内找到与两平面交线垂直的直线，即可找到证明面面垂直所需要的线面垂直，可以结合 $AB=AE$，作出正方形 $ABFE$，取 AF 与 BE 的交点 O，通过利用三角形的全等证明 $PO\perp AF$，从而 $AF\perp$ 平面 PBE，进而得到平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$；也可以结合 $\angle PBA=\angle PBC$ 可知 P 在底面的射影在 $\angle ABC$ 的平分线上，所以可作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，然后证明 O 在 $\angle ABC$ 的平分线上，从而得到，平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$.

思路一：如图，过点 E 作 $EF\ /\!/\ AB$，交 BC 于点 F，

连结 AF 交 BE 于点 O，连结 PO，PF.

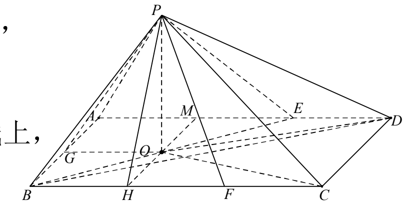
可以证明四边形 $ABFE$ 为正方形，从而 $AF\perp BE$，$AB=BF$.

易得 $PA=PF$，从而 $PO\perp AF$.



于是所以 $AF\perp$ 平面 PBE，进而平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$.

思路二：如图，过点 P 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O，
过点 O 分别作 $OG\perp AB$，$OH\perp BC$，垂足分别为 G，H，
连结 PG，PH．则 $AB\perp$ 平面 POG，
可得 $\triangle PBG\cong\triangle PBH$，　$BG=BH$，
连结 OB，则 $\triangle OBG\cong\triangle OBH$，从而 O 在 $\angle ABC$ 的平分线上，
即 O 在 BE 上，于是 $PO\subset$ 面 PBE，
进而平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$.



【错因分析】不会根据题目的条件作出适当的辅助线导致解题受阻.

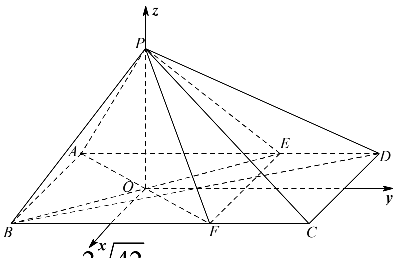
【难度属性】属于中档题.

第 19 题（2）

【考查意图】本小题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系，直线与平面所成角等基础知识；考查空间想象能力，逻辑推理能力，运算求解能力等；考查化归与转化思想，数形结合思想，函数与方程思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性.

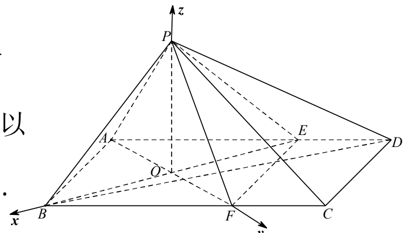
【解法综述】只要能根据（1）的结果，建立合理的空间直角坐标系，即可利用坐标方法解决问题；也可以利用等体积法计算点 P 到平面 PBD 的距离，再根据直线与平面所成角的定义求出直线 PC 和平面 PBD 所成角的正弦值.

思路一：以（1）思路一中的点 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OP}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，利用向量方法求得平面 BPD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(3,2,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，



再利用公式可以求得直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$.

思路二：以（1）思路一中的点 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{OP}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系．用向量方法求得平面 BPD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,5,1)$，再利用公式可以求得直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$.



思路三：利用 $V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$，求出点 C 到平面 PBD 的距离为 $h=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

所以直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$.

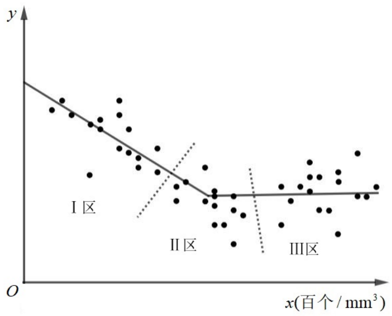
【错因分析】考生可能存在的错误有：不会利用（1）的结论建立合理的空间直角坐标系；点的坐标或法向量计算错误等.

【难度属性】属于中档题.

20．（12 分）

抗癌药在消灭癌细胞的同时也会使白细胞的数量减少．一般地，病人体内白细胞浓度低于 4000 个 /mm^3 时需要使用升血药物进行“升血”治疗，以刺激骨髓造血，增加血液中白细胞数量．为了解病人的最终用药剂量数 y（1 剂量=25 μg）和首次用药时的白细胞浓度 x

（单位：百个$/\mathrm{mm}^3$）的关系，某校研究性学习小组从医院甲随机抽取了首次用药时白细胞浓度均分布在 0~4000 个$/\mathrm{mm}^3$的 47 个病例，其首次用药时的白细胞浓度为x_i（单位：百个$/\mathrm{mm}^3$），最终用药剂量数为$y_i\ (i=1,2,\cdots,47)$，得到数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,47)$，数据散点图如图所示．他们观察发现，这些点大致分布在一条L形折线（由线段L_1和L_2组成）附近，其中L_1所在直线是由Ⅰ、Ⅱ区的点得到的回归直线，方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$；$L_2$所在直线是由Ⅱ、Ⅲ区的点得到的回归直线，方程为$y=0.02x+14.64$．



以下是他们在统计中得到的部分数据：

Ⅰ区：$\sum\limits_{i=1}^{16}x_iy_i=4721$，$\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2=1706$，$\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=160$，$\sum\limits_{i=1}^{16}y_i=480$；

Ⅱ区：$\sum\limits_{i=17}^{30}x_iy_i=4713$，$\sum\limits_{i=17}^{30}x_i^2=5134$，$\sum\limits_{i=17}^{30}x_i=266$，$\sum\limits_{i=17}^{30}y_i=252$．

（1）根据上述数据求$\hat{a},\hat{b}$的值；（结果保留两位小数）

（2）根据L形折线估计，首次用药时白细胞浓度（单位：个$/\mathrm{mm}^3$）为多少时最终用药剂量最少？（结果保留整数）

（3）事实上，使用该升血药的大量数据表明，当白细胞浓度在 0~4000 个$/\mathrm{mm}^3$时，首次用药时白细胞浓度越高，最终用药剂量越少．请从统计学的角度分析（2）的结论与实际情况产生差异的原因．（至少写出两点）

参考数据：

$\dfrac{4721-16\times10\times30}{1706-16\times10^2}\approx-0.745$，$\dfrac{9434-30\times14.5\times24}{6840-30\times14.5^2}\approx-1.889$，$\dfrac{9434-30\times14.2\times24.4}{6840-30\times14.2^2}\approx-1.214$．

$30+0.745\times10=37.45$，$24+1.889\times14.5\approx51.39$，$24.4+1.214\times14.2\approx41.64$．

第 20 题（1）

【考查意图】本小题主要考查回归分析等基础知识；考查数学建模能力，运算求解能力，逻辑推理能力，创新能力以及理解能力等；考查统计与概率思想，函数与方程思想等；考查数学抽象，数学建模，数据分析和数学运算等核心素养；体现综合性，应用性和创新性．

【解法综述】只要能根据题意正确读取参考数据，并利用给定的参考公式进行变形，便可

求得 $\hat{a},\hat{b}$.

思路：由题意可知需要求 30 个点的相关数据，利用参考数据可以求得 $\overline{x}=14.2,\overline{y}=24.4$ ，再利用公式进行变形，便可求得 $\hat{a}=41.64,\hat{b}=-1.21$.

【错因分析】考生可能存在的错误有：不能从参考数据读取解题需要的数据；不能正确对线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中， $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$ 进行变形；计算错误.

【难度属性】属于中档题.

第 20 题（2）

【考查意图】本小题主要考查回归分析等基础知识；考查数学建模能力，运算求解能力，逻辑推理能力，创新能力以及阅读能力等；考查统计与概率思想，函数与方程思想等；考查数学抽象，数学建模，数据分析和数学运算等核心素养；体现综合性，应用性和创新性.

【解法综述】只要准确理解 L 形折线的意义，并利用（1）中求得的数据进行运算，即可解决问题.

思路：根据（1）知， L_1 的方程为 $y=-1.21x+41.64$.根据 L 形折线可知，线段 L_1 和 L_2 交点处对应的白细胞浓度为最终用药剂量最少时的首次用药时的白细胞浓度，只需要联立两直线方程即可得到首次用药时的白细胞浓度为 2195 个 $/\mathrm{mm}^3$ 时，最终用药剂量最少.

【错因分析】考生可能存在的错误有：无法读懂题意，不知道线段 L_1 和 L_2 交点处对应的白细胞浓度为最终用药剂量最少时的首次用药时的白细胞浓度，计算错误.

【难度属性】属于中档题.

第 20 题（3）

【考查意图】本小题以开放性问题为载体，主要考查回归分析等基础知识；考查数学建模能力，逻辑推理能力，创新能力以及表达能力等；考查统计与概率思想等；考查数学抽象，数学建模，数据分析等核心素养；体现综合性，应用性和创新性.

【解法综述】只要掌握回归分析及抽样的方法，即可解决问题.

思路：可以从样本以及拟合模型的合理性、科学性等方面分析产生差异的理由.

【错因分析】考生可能存在的错误有：表达能力不足，无法从样本及拟合模型等方面分析.

【难度属性】属于中档题.

21．(12 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\left(x+3\right)\mathrm{e}^{-x}+2x$.

（1）证明： $f\left(x\right)$ 恰有两个极值点；

（2）若 $f\left(x\right)\leqslant ax^2+3$ ，求 a 的取值范围.

第 21 题（1）

【考查意图】本小题以初等函数为载体，考查利用导数研究函数的极值等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查函数与方程思想、分类与整合思想等，考查数学运算

等核心素养，体现综合性．

【解法综述】 只要掌握基本初等函数的求导公式及导数的运算法则、会用导数研究函数的极值，便可解决问题．

思路：求得 $f'(x)=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2$，对 $f'(x)$ 再次求导，利用 $f''(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ 讨论 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ 的性质，从而得到 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，在 $(-\infty,-1)$ 单调递减，结合 $f'(-1)=2-\mathrm{e}<0$，$f'(0)=0$，$f'(-2)=2>0$ 即可解决问题．

【错因分析】 考生可能存在的错误有：求导出错；求得 $f'(x)=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2$ 后不知如何入手或讨论不完整等．

【难度属性】 属于中档题．

第 21 题（2）

【考查意图】 本小题以不等式恒成立问题为载体，考查利用导数研究函数的极值、最值，不等式等基础知识；考查逻辑推理能力，直观想象能力，运算求解能力，创新能力等，考查函数与方程思想，化归与转化思想，数形结合思想，分类与整合思想等；考查逻辑推理，直观想象，数学运算等核心素养；体现综合性和创新性．

【解法综述】 只要掌握利用导数研究函数性质的基本思路，具备较强的运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力，并能灵活运用数形结合思想、转化与化归思想找到使得不等式成立的必要条件，再证明充分性，便可解决问题．

思路一：通过等价变形，将已知不等式转化为 $(ax^2-2x+3)\mathrm{e}^x\ge x+3$，构造函数 $g(x)=(ax^2-2x+3)\mathrm{e}^x-x-3$，发现 $g(0)=0$，由此可知 0 是 $g(x)$ 的一个极小值点，结合 $g'(0)=0$，在 $x=0$ 附近 $g'(x)$ 左负右正，于是必有 $g''(0)\ge 0$，从而找到必要条件 $a\ge\frac{1}{2}$，论证则分为 $a\ge\frac{1}{2}$，$0<a<\frac{1}{2}$ 和 $a\le 0$ 三类情况进行讨论．当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，结合 $x^2\mathrm{e}^x\ge 0$ 可得 $g(x)\ge\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x+(3-2x)\mathrm{e}^x-x-3$，利用导数容易证明 $h(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-2x+3\right)\mathrm{e}^x-x-3\ge 0$，从而 $g(x)\ge 0$，即 $f(x)\le ax^2+3$；当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)=(ax^2+2(a-1)x+1)\mathrm{e}^x-1$，$g''(x)=(ax^2+2(2a-1)x+2a-1)\mathrm{e}^x$，设 $\varphi(x)=ax^2+2(2a-1)x+2a-1$，可得 $\varphi(x)$ 恰有两个零点 x_1,x_2，易得 $x_1<0<x_2$，且 $g(x)$ 在 $(0,x_2)$ 单调递减，从而 $x\in(0,x_2)$ 时 $g(x)<g(0)=0$，得出矛盾；当 $a\le 0$ 时，则 $g(1)\le\mathrm{e}-4<0$，可得 $f(1)>a+3$ 与 $f(1)\le a+3$ 矛盾；从而 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$．

思路二：构造函数 $g(x)=(x+3)\mathrm{e}^{-x}-ax^2+2x-3$，则 $g(x)\le 0$，$g''(x)\le g''(0)=1-2a$，与思路一类似得到必要条件 $a\ge\frac{1}{2}$，论证需分为 $a\ge\frac{1}{2}$，$0<a<\frac{1}{2}$ 和 $a\le 0$ 三类情况进行讨论．当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，易得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，在 $(-\infty,0)$ 单调递增，从而 $g(x)\le g(0)=0$，即

$f(x)\le ax^2+3$；当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，易知 $g''(0)\cdot g''(-1)<0$，从而 $g''(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 恰有一个零点 x_1，且容易得到 $g(x)$ 在 $(x_1,0)$ 单调递减，进而得到当 $x\in(x_1,0)$ 时，$g(x)>g(0)=0$，与 $g(x)\le 0$ 矛盾；当 $a\le 0$ 时，易得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$，与 $g(x)\le 0$ 矛盾；从而 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

思路三：同思路二直接构造函数得到论证也只需分为 $a\ge\dfrac{1}{2}$，$0<a<\dfrac{1}{2}$ 和 $a\le 0$ 三类情况进行讨论，当 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，同思路二易得 $f(x)\le ax^2+3$；当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，利用 $\mathrm{e}^x>x^2\ (x\ge 1)$ 得到当 $b>\dfrac{1}{a}>2$ 时，$g''(b)<0$，从而 $g''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恰有一个零点 x_1，且易得当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g(x)>g(0)=0$，得到矛盾；当 $a\le 0$ 时，由 $g(2)\ge 5\mathrm{e}^{-2}+1>0$ 得到矛盾，从而 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

思路四：构造函数 $g(x)=(x+3)\mathrm{e}^{-x}-ax^2+2x-3$，利用 $g(x)\le 0$，$g(0)=0$，得到 0 是 $g(x)$ 的一个极大值点，进而存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(-\delta,0)$ 时 $g'(x)\ge 0$，即 $2a\ge\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}$，

且当 $x\in(0,\delta)$ 时 $g'(x)\le 0$，即 $2a\ge\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}$，

设 $h(x)=\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}$，则 $h(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单调递增，在 $x\in(0,\delta)$ 单调递减，

从而 $2a\ge\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}$，利用导数定义可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}=u'(0)=1$，

从而 $a\ge\dfrac{1}{2}$．而当 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，同思路二易得 $f(x)\le ax^2+3$；故 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

【错因分析】考生可能存在的错误有：不会利用必要性探路将问题分为 $a\ge\dfrac{1}{2}$，$0<a<\dfrac{1}{2}$ 和 $a\le 0$ 三类情况进行讨论；不会根据题意构造恰当的函数帮助解题；不会利用合适的方法进行论证.

【难度属性】属于难题.

22．(12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，O 为坐标原点，直线 $l:x=1$ 与 C 的两个交点和 O,B 构成一个面积为 $\sqrt{6}$ 的菱形.

（1）求 C 的方程；

（2）圆 E 过 O,B，交 l 于点 M,N，直线 AM,AN 分别交 C 于另一点 P,Q，点 S,T 满

足 $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SP}$， $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，求 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值．

第 22 题（1）

【考查意图】本小题以椭圆为载体，考查直线的方程、椭圆的标准方程及其简单几何性质等基础知识；考查运算求解能力；考查数形结合思想，函数与方程思想；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性、综合性．

【解法综述】只要掌握直线的方程、椭圆的标准方程及其简单几何性质，能根据图形的对称性得到 $a=2$，再将面积问题转化为长度关系，从而求出直线与椭圆交点的坐标，代入椭圆方程便可求得椭圆的标准方程．

思路：先利用对称性易得 $a=2$，再根据菱形的面积求得直线 l 与 C 的一个交点 $D\left(1,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$．代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 便可求得 $b^2=2$，从而得到椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

【错因分析】考生可能存在的错误有：不能将面积转化为交点的坐标，或代入方程时计算错误．

【难度属性】属于容易题．

第 22 题（2）

【考查意图】本小题以最值问题为载体，蕴含定点定值问题，考查直线与圆、椭圆的位置关系，平面向量等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，直观想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性．

【解法综述】利用圆的方程或圆的性质均可得到 M,N 的纵坐标之积为定值，再根据题意得到 P,Q 的纵坐标与 M,N 的纵坐标之间的关系，通过假设直线 PQ 的方程并与椭圆联立，借助韦达定理得到 P,Q 的纵坐标所满足的关系，结合 M,N 的纵坐标之积为定值，通过计算可以得到直线 PQ 过定点，根据向量关系可得 $ST/\!/PQ$ 且直线 ST 也过定点，然后可以利用数形结合或利用函数方法解决问题．

思路一：由题意易得 MN 为圆 E 的直径，从而 $y_My_N=-1$，进而 $k_{AP}k_{AQ}=-\frac{1}{9}$，设直线 PQ 的方程为 $x=my+t\left(t\neq-2\right)$， $P\left(x_1,y_1\right)$ $Q\left(x_2,y_2\right)$，则有 $\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-\frac{1}{9}$，结合韦达定理可得 $t=\frac{14}{11}$，从而直线 PQ 过定点 $G\left(\frac{14}{11},0\right)$，由 $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SP}$， $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，可得 $ST/\!/PQ$，且直线 ST 也过定点 $H\left(-\frac{13}{11},0\right)$，注意到 O 位于线段 GH 上，可得 O 到直线 ST 的距离与 O 到直线 PQ 的距离之和的最大值为 $\left|GH\right|=\frac{27}{11}$．

思路二：先假设直线 AM 的方程为 $y=k_1\left(x+2\right)$，直线 AN 的方程为 $y=k_2\left(x+2\right)$，则

$M\left(1,3k_1\right)$，$N\left(1,3k_2\right)$．由题意易得 MN 为圆 E 的直径，从而 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ 可得 $k_1k_2=-\dfrac{1}{9}$．将直线 AM 的方程与椭圆联立，可以利用韦达定理也可以通过因式分解得到 $x_P=-\dfrac{4k_1{}^2-2}{2k_1{}^2+1}$，进而得到 $P\left(-\dfrac{4k_1{}^2-2}{2k_1{}^2+1},\dfrac{4k_1}{2k_1{}^2+1}\right)$，同理可得 $Q\left(-\dfrac{4k_2{}^2-2}{2k_2{}^2+1},\dfrac{4k_2}{2k_2{}^2+1}\right)$．结合 $k_1k_2=-\dfrac{1}{9}$ 可得当 $k_1+k_2\neq0$ 时，直线 PQ 的方程为 $y=-\dfrac{11}{18\left(k_1+k_2\right)}\left(x-\dfrac{14}{11}\right)$，当 $k_1+k_2=0$ 时，直线 PQ 的方程为 $x=\dfrac{14}{11}$，从而直线 PQ 始终过定点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$，由 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP}$，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，可得 $ST /\!/ PQ$，且直线 ST 也过定点 $H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$，设直线 PQ 的方程为 $x=ty+\dfrac{14}{11}$，可得点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和为 $d_1+d_2=\dfrac{27}{11\sqrt{t^2+1}}$，从而当且仅当 $t=0$，即 PQ 垂直于 x 轴时，点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值为 $\dfrac{27}{11}$．

思路三：由题意可设 $M\left(1,y_M\right)$，$N\left(1,y_N\right)$．利用圆 E 的方程可得 $y_My_N=-1$．易得直线 AM 和直线 AN 的方程分别为 $y=\dfrac{y_M}{3}\left(x+2\right)$，$y=\dfrac{y_N}{3}\left(x+2\right)$．将直线 AM 的方程与椭圆联立，利用韦达定理可得 $x_P=-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}$，从而 $P\left(-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9},\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}\right)$．同理可得 $Q\left(-\dfrac{4y_N^2-18}{2y_N^2+9},\dfrac{12y_N}{2y_N^2+9}\right)$．

当 $y_M+y_N\neq0$ 时，可得直线 PQ 的方程为 $y=-\dfrac{11}{6\left(y_M+y_N\right)}\left(x-\dfrac{14}{11}\right)$．

当 $y_M+y_N=0$ 时，直线 PQ 的方程为 $x=\dfrac{14}{11}$，从而直线 PQ 始终过定点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$，由 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP}$，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，可得 $ST /\!/ PQ$，且直线 ST 也过定点 $H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$，设直线 PQ 的方程为 $x=ty+\dfrac{14}{11}$，可得点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和为 $d_1+d_2=\dfrac{27}{11\sqrt{t^2+1}}$，从而当且仅当 $t=0$，即 PQ 垂直于 x 轴时，点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值为 $\dfrac{27}{11}$．

思路四：由题意易得 MN 为圆 E 的直径，从而 $y_My_N=-1$，进而 $k_{AP}k_{AQ}=-\dfrac{1}{9}$，显然 k_{AP},k_{AQ}

都不为零，设 $t_1=\dfrac{1}{k_{AP}}$，$t_2=\dfrac{1}{k_{AQ}}$，则 $t_1\cdot t_2=-9$．可设直线 AP 和直线 AQ 的方程分别为 $x=t_1y-2$，$x=t_2y-2$，从而可得直线 AP 与直线 AQ 的直线系方程为 $\left[t_1y-(x+2)\right]\left[t_2y-(x+2)\right]=0$，即 $-9y^2-\left(t_1+t_2\right)(x+2)y+(x+2)^2=0$，

与椭圆联立可得 $-\dfrac{9}{2}\left(4-x^2\right)-\left(t_1+t_2\right)(2+x)y+(2+x)^2=0$．

进而求得直线 PQ 的方程为 $\dfrac{11}{2}x-\left(t_1+t_2\right)y-7=0$．

从而直线 PQ 都经过点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$，由 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP}$，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，可得 $ST/\!/PQ$，

且直线 ST 也过定点 $H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$，注意到 O 位于线段 GH 上，可得 O 到直线 ST 的距离与 O 到直线 PQ 的距离之和的最大值为 $|GH|=\dfrac{27}{11}$．

【错因分析】考生可能存在的错误有：不会合理假设直线方程，利用设点的方法运算量大，运算能力不足导致解题受阻；数学运算素养较差，无法把握正确的运算方向，不能利用韦达定理进行有效变形，导致运算繁杂无法继续，从而不能证得直线 PQ 过定点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$，导致思路受阻；对向量知识不熟悉，不能得到直线 ST 也过定点 $H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$；或得到定点后不懂如何求最值等.

【难度属性】属于难题.